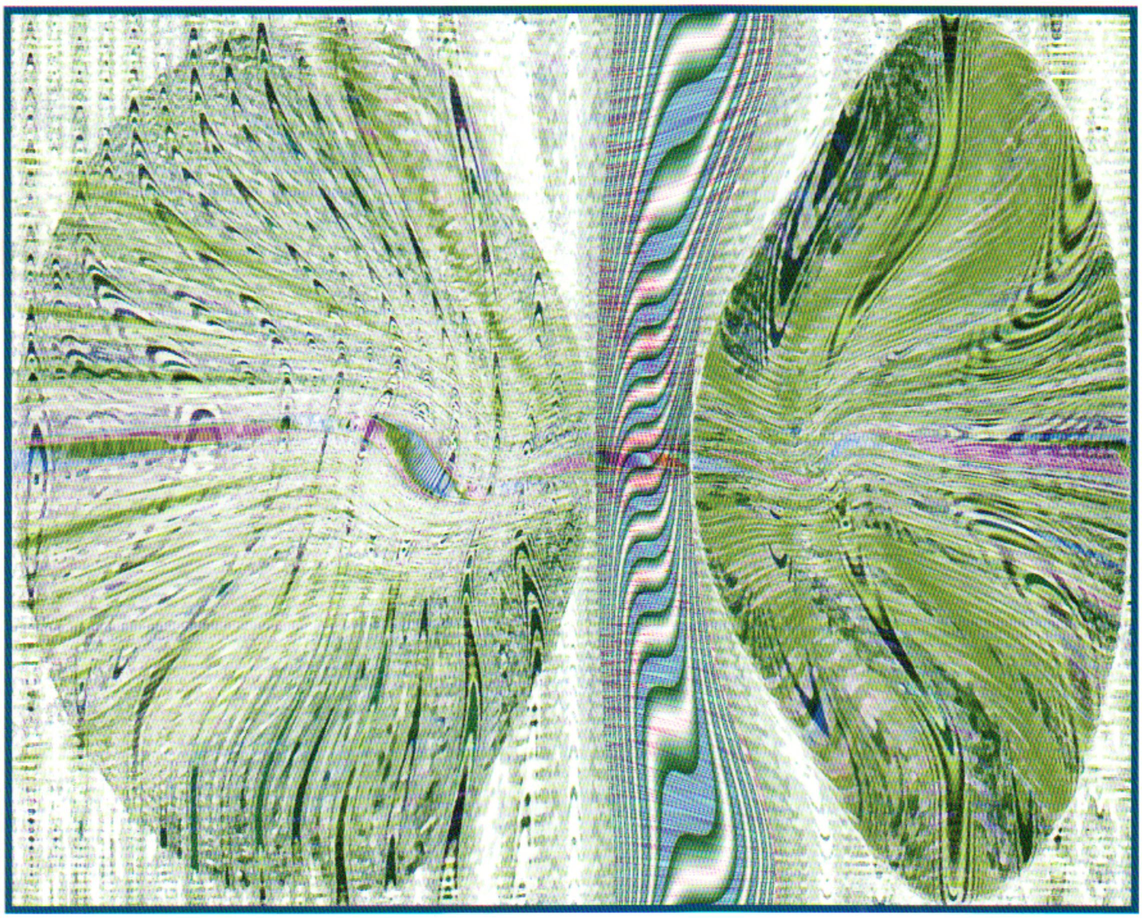
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2011年6月1日発行　第49巻6号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

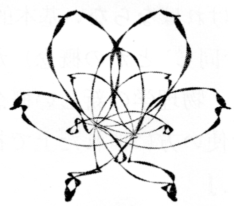
6
2011

特集 物理イメージと数式表現
発想と思考の補助線をたどる



No.576
サイエンス社

波と量子



長谷川 修司

1. はじめに

東京スカイツリータワーから放射される地上デジタル放送の電波の周波数 ν は 500 MHz 程度だそうで，その値と，光速度 c と波長 λ との関係式

$$c = \nu \cdot \lambda \tag{1}$$

を使ってこの電磁波の波長 λ を計算すると 60 cm 程度になる．80 MHz の FM ラジオ放送の電波の波長は 4 m 程度になるし，AM 放送の電波にいたっては 300 m にもなる．このマクロなスケールの波長のおかげで，ビルの裏側でも，ある程度電波が「回折」して回り込むので（多少の電波障害はあるが）ラジオやテレビを見聞きできる．有名な「**ヤングの二重スリットの干渉実験**」（1805 年）以来，電磁波が波であることは疑いの余地のない事実であり，マクスウェルがそれを理論的に体系化した（1864 年）．ファインマンは有名な彼の教科書の中で，マクスウェル方程式の集大成は 19 世紀最大の出来事であり，それに比べれば米国の南北戦争など取るに足らない出来事だと述べている（ご冗談でしょう？）[1]．

しかし，20 世紀に入ってまもなく，光は電子のような粒子的性質を持つ，という「**光量子仮説**」をアインシュタインが言い出した（1905 年）．つまり，周波数 ν の電磁波は

$$E = h\nu, \quad p = \frac{E}{c} \tag{2}$$

で書けるエネルギー E と運動量 p を持つ光（量）子であるという（h はプランク定数）．当時，マクスウェルの古典電磁気学では理解できなかった「光電効果」の現象を説明するために提案された仮説であった．ときにはメートルのオーダーになる波長を持つ電磁波のエネルギーと運動量が，空間的に局在した粒子のような「塊」になっているという．そんな粒子描像は，今までに知られていた回折や干渉現象など電磁波の「空間的に拡がった」性質と相容れるはずもない．なので到底受け入れられない，というのが当時の学界の反応だったようだ．実際，この光量子仮説を精密な実験で確かめたミリカンも，その論文の序文で，「the bold, not to say reckless, hypothesis （無謀と言わないまでも大胆な仮説）」と皮肉っている[2]．しかし，多数の実験を行った結果，ミリカンは論文の結論のセクションで，「アインシュタインの光電効果の式はすべての場合で観測結果を正しく記述するように見える（Einstein's photoelectric equation *appears* in every case to predict exactly the observed results）」と書いている．自分自身の実験結果を見ても，彼はまだ半信半疑だったようだ（ミリカンの 1923 年のノーベル物理学賞受賞業績には，有名な油滴の実験による電気素量の決定だけでなく，この光電効果の実証実験も含まれている）．

ミリカンに限らず，物理学を勉強した人なら誰でも，電磁波は波でもあるし粒でもあるという**波動粒子二重性**（wave-particle duality）を実感で

きることはないであろう．それゆえに，物理学って何だか良くわからない，という印象を与えることになる．あるいは，自然の奥底には，人間には思い描くことのできない何かが存在する，という畏敬の念を与えることにもなろう．メートルオーダーの波長の波が空間的に局在したエネルギーの塊だなんて，どんな「絵」を想像すればいいのか途方にくれるのは当り前で，長年，物理学で生計を立てている私でさえ今もってそう思うのだから，初学者が面食らうのは何の不思議もない．イギリスの高校物理の教科書『アドバンシング物理』には，こう書いてある．「光子は決して小さく局在するひと塊のものではありえない．エネルギーとしてひと塊であっても，空間的にひと塊であるということにはならない．光子は単純な粒子とはいえないし，また単純な波ともいえない.」…ますます，分からなくなってくる．

ド・ブロイは，この光量子仮説からインスピレーションを得てこう考えた (1923 年)[3]．波だと考えられていた電磁波が粒子的性質をもつというなら，粒子だと考えられていた電子が波動性を持ってもいいのではないか，そうすれば，電子線を結晶にあてたときに見られる奇妙な反射率の角度依存性（ブラッグ反射のこと）も回折現象として説明できるはずだ，と（ド・ブロイの理論の前にすでにダヴィッソンらの電子回折の実験結果が報告されていて，それを説明するためにド・ブロイは波動説を考え出したのである．多くの教科書には，ド・ブロイの予言が先にあって，その後に電子回折で実験的に実証されたと書かれてあるが，史実は逆[4]）．

(1) 式と (2) 式を結びつけると，

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad \nu = \frac{E}{h} \tag{3}$$

が簡単に導かれる．第 1 式がいわゆる**ド・ブロイの公式**であり，電子の波動的性質である波長と粒子的性質である運動量を結び付けた関係式として有名である．しかし，彼がイメージしていた波は現代の波動描像とは少し違っていたようだ．電子が速さ v で走っていると，エネルギー $E = mc^2$，運動量 $p = mv$，質量 $m = {}^{m_0}/\!\sqrt{1-\beta^2}$（$m_0$ は電子の静止質量，$\beta = {}^{v}/{}_{c}$）なので，この電子の波の（位相）速度 v_ϕ を計算すると，(3) 式より

$$v_\phi = \nu \cdot \lambda = \frac{E}{p} = \frac{c}{\beta} \tag{4}$$

と書ける．電子の速さ v は光速 c を超えられないので常に $\beta < 1$ であり，その結果 $v_\phi > c$ となる．電子の波は光速より速く進むという．これは相対性理論に反するので，ド・ブロイの論文[3]では，この波を「位相波」と呼び，エネルギーや情報は運べない「非物質波（non-material wave)」と言っている．つまり，電子はあくまでも粒子であり，それに「位相波」という波が付随していると考えた．きん斗雲に乗った孫悟空のイメージだ．きん斗雲こと位相波が光速より速く走り，電子より一足先に結晶にぶつかって干渉や回折を起こして電子が進むべき方向を決める．その後，孫悟空ならぬ電子が，そのきん斗雲に導かれようにして進んでいくという．ド・ブロイの位相波の正体は不明だが，波動性と粒子性について極めて明快なイメージだったといえる．逆に，現代の物理学で主流の「**物質波**（material wave)」の描像では，電磁波・光子の場合のように具体的なイメージを描けず，あるときは波動として振る舞い，またあるときは粒子として振る舞う，としか言ってくれない（ボーアの相補性原理)．煙幕を張られてしまって歯がゆい思いだけが残ることになる．30 年ほど前，私が大学 3 年生のときに受けた M 教授の量子力学の講義でも，電子の波動性と粒子性に関してこれ以上踏み込んではいけない，とまで言われた．このボーアの相補性原理，あるいはコペンハーゲン解釈といわれる，言ってみればご都合主義のような描像を，アインシュタインは生涯受け入れず，「精神安定哲学，一種の宗教のようなもので，大変精巧に作り上げられているので，当面の間，信者たちに柔らかな枕を提供するだろう」とまで皮肉ったという[1]．M 教授が，「わかるか，わからないかではなく，信じるか信じないかだけの問題だ」と授業中に言い放ったのを今でもはっきり覚えている．

しかし，このようなナイーブな疑問や不満，モヤモヤしてしっくりと腑に落ちないという気持ち

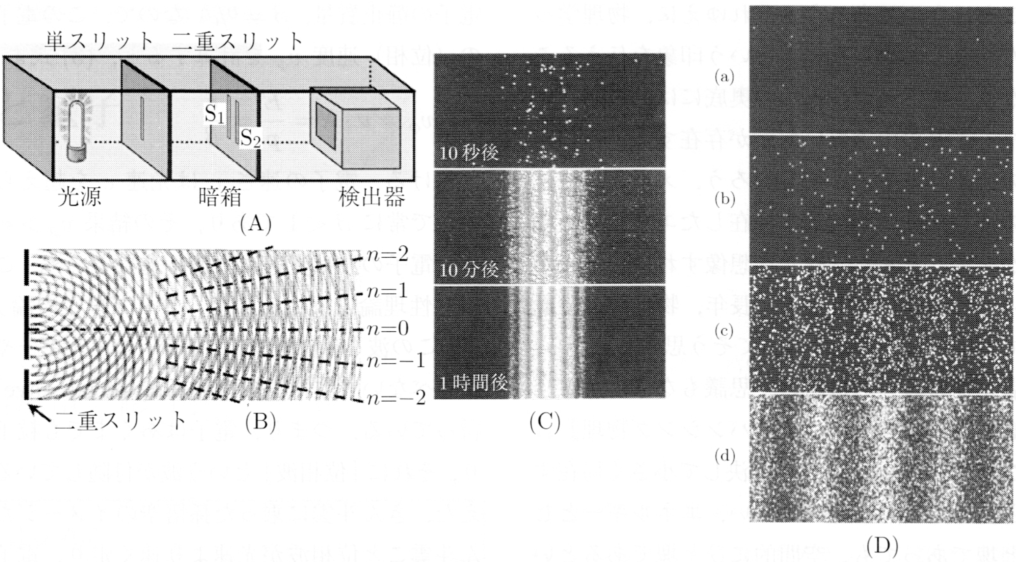


図 1　(A) 非常に弱い光によるヤングの二重スリットの干渉実験．(B) 二重スリットから出てくる波の干渉によって明線と暗線ができる模式図．(C) 単一光子検出器による干渉縞の形成過程を観測した結果（文献 5) より転載）．(D) 電子波によるヤングの二重スリット実験での干渉縞の形成過程（文献 8) より転載）．画面に到達した電子の総数はおよそ (a) 7, (b) 200, (c) 6000, (d) 40000．この干渉縞の形成過程のムービーが日立基礎研究所のホームページで閲覧できる（http://www.hqrd.hitachi.co.jp/rd/doubleslit.cfm）．

は，科学を研究する上で重要なことで，実際，それがモチベーションになって研究が進む場合が多い．例えば，アインシュタインが，光と同じ速さで走ったら景色はどう見えるのだろうか，と考えたことのように．この小文では，量子の波動粒子二重性をどうイメージしたらいいのか，読者の理解に少しでも助けになればと思って書いてみた．しかし，もちろん，この不可思議な二重性など誰にも実感できないことは明らかで，ただ，それに慣れるしかないのであるが．

2. 光子の干渉

現代では実験技術が進歩し，スクリーン上に到達する 1 個 1 個の光子や電子を検出してその位置を表示することができる．そのような実験装置を使って，光および電子による「ヤングの二重スリットの実験」が行われている．図 1(A) に示すように，暗箱の中で，非常に弱い光を用いたヤングの二重スリットの実験を行った．高校の教科書には，この実験の模式図として図 1(B) に示すような図が描かれている．2 つのスリットから出てきた球面波が干渉して明線と暗線，つまり干渉縞を作るという説明である．今回の実験では，光が非常に弱いため，光子が 1 個ずつ二重スリットに照射される．検出器は，1 個 1 個の光子がどこに到着したのか検出できる「位置敏感型検出器」である．図 1(C) がその検出器の出力結果であり，1 個 1 個の輝点が検出された 1 個 1 個の光子を表している[5]．この画像から，光は 1 個，2 個，3 個，… と数えられる「粒子」として検出されていることがわかる．到着する光子の数が少ないときには，規則性なくランダムな位置に光子が到着しているように見えるが，光子の数が増加してくると次第に縞模様が見えてくる．これが，二重スリットによる干渉縞である．波としての性質は，多数の光子の分布として表れていることがわかる．光は，このように電磁波という波動性と同時に光子という

粒子性も併せ持つ，という二重性を如実に示す実験である．

マクスウェル方程式から，例えば電磁波の振動電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ に関する波動方程式

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{5}$$

が導かれる[5]．その解は，平面波なら（複素数表記で）

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cdot \exp\left[2\pi i\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{h} - \nu t\right)\right] \tag{6}$$

と書ける．実際，これを (5) 式に代入すると，(2) 式を使って解であることが示せる．図 1 (C) の長時間露光で見られた明暗の干渉縞は，2 つのスリットから発した，このような電場が重なった合成電場の絶対値の二乗，つまり波としての振幅強度の分布である．しかし，短時間露光のときに見られた光子 1 個 1 個は，この方程式では記述できない．それには電磁場の第二量子化，あるいは**場の量子論**という理論的枠組みが必要となる．それによると，

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \left[\widehat{a} \cdot \exp\left\{2\pi i\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{h} - \nu t\right)\right\} + \widehat{a}^{+} \cdot \exp\left\{-2\pi i\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{h} - \nu t\right)\right\}\right] \tag{7}$$

なる形に書ける．やや複雑になっているが，$\widehat{a}$ と $\widehat{a}^{+}$ は光子の**生成消滅演算子**と呼ばれるもので，光の粒子性を表す．実際，両者の積 $\widehat{a}^{+} \cdot \widehat{a} = n$（の固有値）は整数値（$0, 1, 2, \cdots$）をとり，それが光子の数を表す．指数関数の部分は古典的な (6) 式と同じ形であり，光の波動性を表す．このように一つの表式の中に粒子性と波動性があらわな形で表現されている．しかも 1 個の光子だけでなく，多数個の粒子を同時に扱える．ちなみに，光の波動としてのエネルギーは，(6) 式より，波の振幅の絶対値の二乗 $|\boldsymbol{E}_0|^2$（と振動数の二乗 ν^2）に比例するが[6]，それを，粒子描像を考慮して正確に表現すれば，光子のエネルギーは (2) 式で与えられる $h\nu$ であり，電磁波の振幅が光子の個数（n）なので，単位時間に照射される光のエネルギーは，$n \cdot h\nu$ である．これが波動としてのエネルギーに対応する．しかし，光電効果のように，個々の光子と電子の衝突は，1 個 1 個の光子のエネルギーだけが問題となるので，波動としてのエネルギーは関係ない．このような考え方によって，光電効果を定量的に測定したレナードの実験結果を理解できる[4]．

3. 電子の干渉

ド・ブロイの説を聞いたデバイは，「あまりに子どもじみている」，何かが波だというなら，適切な波動方程式がなければならない，波とは普通，何かが波打っているもの，それは何なのか，と断じたという．その言葉を真剣に受け止めたシュレーディンガーは，未知なる ψ（プサイ）関数についての波動方程式，ご存知**シュレーディンガー方程式**を作り出した．自由電子の場合，$\psi(\boldsymbol{r},t)$ は

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \tag{8}$$

なる方程式を満たし（$\hbar$ はプランク定数を 2π で割った定数，m は電子の質量），その解は，

$$\psi = \psi_0 \cdot \exp\left[2\pi i\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{h} - \nu t\right)\right] \tag{9}$$

と，平面波の形になる．これは電磁波 (6) 式と同じ形になっている．つまり，ψ 関数が振動して波動として伝播することが電子の運動を記述することになるという．この解から，電子の運動量を ψ の波長に，電子のエネルギーを ψ の振動数に対応させることができる（実際，(9) 式を (8) 式に代入すると，$h\nu = p^2/2m$（運動エネルギー）となる）．まさにド・ブロイの (3) 式が自動的に出てくる．

しかし，ψ が何か，その解釈をめぐって当時の物理学者たちはもちろん，現在まで様々な議論が続いている．従来知られていたニュートンの運動方程式やマクスウェルの方程式，あるいは水や音の波動方程式では，観測可能な物理量，つまり物体の位置や運動量，電場，磁場，変位などが変数であったが，シュレーディンガー方程式の変数 ψ は何なのか．それは直接観測できるものではないために，様々な拒否反応が出たし，現在でもある．

シュレーディンガーは $|\psi|^2$ を電荷密度のようなもの，つまり粒子に付随する霧のようなものではないかと思っていたようである．しかし，まもなくボルンは，$|\psi|^2$ は電子のある状態が見出される確率を与えると解釈し，今ではそれが主流となっている．つまり，「電子の運動は，確率の法則に従うが，確率そのものは因果律に従って波として伝播する」という．パウリはさらに進めて $|\psi|^2$ は1個の電子が特定の場所に見出される確率を表しているとした．このような「波動関数の解釈」によって，「無理やり」波動描像と粒子描像がある程度折り合いをつけたといえる．

光の代わりに電子を使ったヤングの二重スリットの実験もある．電子線ホログラフィ顕微鏡という装置を使うが，その詳細は文献4,7,8)にゆずる．その観察結果が図1(D)に示されている[8)]．ここでも1個1個の電子を検出できる位置敏感型検出器を用いている．この図は，到着した電子を検出して干渉縞ができていく過程を撮影したビデオからとったスナップショット写真である．画面上の輝点1個が検出器に到達した電子1個である．(a)～(c)に示すように，検出器に到着する電子の数が少ないときには電子はバラバラな位置に到着しているように見えるが，(d)に示すように，電子の数が増えるに従って徐々に干渉縞の濃淡が現れてくる．これは，図1(C)で見た光の干渉縞と全く同じだ．(d)で見える濃淡はシュレーディンガーの波動関数 ψ の絶対値の二乗の分布と一致している．検出器に到達する直前まで，電子は波として振る舞ってスクリーン全体に拡がっている．その時間発展は（因果的であり，）シュレーディンガー方程式で記述される．それを解いて計算される $|\psi|^2$ は，ある場所に電子が見出される確率を与える．しかし，検出器に到達して検出された瞬間に，スクリーン全体に拡がっていた1個1個の電子の波動関数がある一点だけで $|\psi|^2=1$ となり，他のすべての場所では $|\psi|^2=0$ と変化する，つまり，拡がっていた波が一点に「収縮」して粒子となるのである（「**波動関数の収縮**」と呼ばれる）．この波動関数の変化はシュレーディンガー方程式では記述できないもので，光の速度より早く瞬時に，そして非因果的に起こるのである．しかし，どこの場所が選ばれるか，その確率は検出される直前の $|\psi|^2$ で決まるという．だから，1個1個の電子の波動関数を知っているにも関わらず，我々は1個1個の電子が検出器の画面のどこに到着するか予言することはできない．言えるのは確率だけである．シュレーディンガーは，このボルン・パウリ流の解釈を生涯受け入れることはなかったが，現在の（日本で主流の）量子力学は，図1(D)の現象をこのように説明しているのである（シュレーディンガーは，この解釈がばかげていることを示すために，いわゆる「シュレーディンガーの猫」の思考実験を考え出した）．この辺の問題が，いわゆる「**観測問題**」と言われているテーマである．この問題は，量子力学が論理的に一貫性を持つのか，あるいは，量子力学がどこまで実在の世界を反映しているのか，という疑問にまで発展し，量子力学の解釈を巡る中心的課題として現在に至るまで議論の絶えないテーマとなっている．しかし，ここでは深入りするのはやめておくので，文献9)などを参照してほしい．

我々が予言できるのは，多数個の電子を検出した場合に見えてくる，それらの到着位置の確率分布だけである．電子の「波」と言っているのは，1個1個の電子の波動関数であり，確率の波であるが，1個の電子だけでは何の役にも立たず，同じ波動関数をもつ多数個の電子を扱って初めて意味を持つのである．波動関数 ψ は1個の電子の波動関数であるが，多数個の電子の統計的な振舞いを記述するのに役立つのである．このような意味を承知していれば，電子波の干渉は，（太陽光のような非コヒーレントな）光の波の干渉と同じ形式で記述できる．しかし，波動の意味は両者で異なる．光は電場・磁場という場の振動であるが，電子の波動性は上述のような確率の波であり，実体のない波と言わざるを得ない．

図1(D)に示した電子による二重スリットの実験は，外村彰氏らのグループが実現した非常に有名な実験である[7,8)]．この実験が実現する10年以

上も前に，ファインマンは彼の教科書[10]の中で，この実験について次のように言っている；「この現象は，どんな古典的方法をもってしても決して説明することはできません．そして，その中に量子力学の真髄があるのです．まさにミステリーとしかいいようがありません．—しかし，この実験を，実際にやってみようと思ってはいけません．不可能に近いほどスケールを小さくしなければならないので，現実に実験を行うことはできません．頭の中で考えるだけの“思考実験”なのです」．このように，ファインマンが不可能と言っていた実験を見事に実現してしまったのである．

アメリカの科学雑誌 *Physics World* が2002年に「最も美しい物理実験」を挙げるよう読者アンケートを行ったところ，300以上の歴史的な実験の中から，この電子波の干渉縞形成の実験が第1位に選ばれた[11]．ちなみに2位以下のベスト10は，(2) ガリレオの落下実験，(3) ミリカンの油滴の実験，(4) ニュートンのプリズムによる太陽光の分光実験，(5) ヤングの光による二重スリットの実験，(6) キャベンディッシュのねじれ振り子による地球重量の測定実験，(7) エラトステネスによる地球の周長の測定，(8) ガリレオの斜面上での転がり実験，(9) ラザフォードの原子核を発見した散乱実験，(10) フーコーの振り子の実験である．いずれも物理学の根幹をなす重要な法則を実証あるいは発見した実験であるが，その中で図1(D)が第1位に選ばれたのは，電子の波動粒子二重性や波束の収縮といった量子の世界の不思議さを見事に表しているからだと思う．

4. おわりに

東京大学数物連携宇宙研究機構の機構長をしている村山斉氏の著書[12]が20万部を超える大ベストセラーになっているというので，早速買って読んでみた．その中に，ガリレオの有名な言葉が引用されている：「自然という書物は数学の言葉で書かれている」．実際，万有引力の法則を解明したニュートンの著書は『自然哲学のための数学的諸原理』であり，彼自身が作った微分積分という数学で自然の摂理が描かれている．アインシュタインの相対性理論も然り．だから，村山氏が機構長を務めている組織の名前「数物連携」，つまり数学と物理の連携はガリレオやニュートンの昔から始まっているという．この小文で議論した波動粒子二重性も数学の言葉でしか表現することができないようで，日常言語では満足のいく表現には到底ならない．波動粒子二重性，あるいは相補性原理を記述するために，現代では，町田茂と並木美喜雄らが中心となり，多ヒルベルト空間という抽象数学の概念を使って，波でも粒子でもないことを表現する枠組みができ上がっているという．またもや数学で自然が描かれていることを認めざるを得ない．しかし，ボーアがもし，この状況を見たら，そんな抽象数学の記述だけでは満足しないだろう．彼は，量子的世界を通常の言語と古典的概念の枠組みの中で完全に表現するよう努力しなければならないと強く主張した人だった[1]．頭の中で「絵」を描くことができる「可視化可能性」を放棄しようとしなかった．数学を用いて自然を記述するのが物理学ではなく，物理学とは，私たちが自然について何が言えるかという学問であり，日常言語で自然の摂理を表現できることが物理学の最終ゴールなのだと彼はいう．数学に弱い実験屋としては救われる言葉だ．ここで紹介した光子や電子の干渉実験の「美しい」画像を見れば，その意味するところは日常言語では表現できないけれど，数学以上に自然の摂理を見事に語っていると感じるのはひいき目だろうか？

参考文献

1) ロバート．P. クリース（著），吉田三知世（訳），『世界でもっとも美しい 10 の物理方程式』，（日経 BP, 2010）．

2) R.A. Millikan, A direct photoelectric determination of Planck's “h”, *Physical Review* **7**, 355 (1916).

3) L. de Broglie, Waves and quanta, *Nature* **112**, 540 (1923).

4) 長谷川修司，『見えないものをみる—ナノワールドと量子力学—』，（東京大学出版会，2008）．

5) 土屋裕，犬塚英治，杉山優，黒野剛弘，堀口千代春，

「フォトンカウンティング領域における「ヤングの干渉実験」」，テレビジョン学会誌 **36** (11), 1010 (1982).
6) 長谷川修司,『振動・波動』,（講談社基礎物理学シリーズ 2, 2009).
7) A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki, and H. Ezawa, Demonatsration of single-electron build up of an interference pattern, *American Journal of Physics* **57**, 117 (1989); 外村彰,『量子力学を見る—電子線ホログラフィーの挑戦—』, 岩波科学ライブラリー 28,（岩波書店，1995）;『ゲージ場を見る—電子波が拓くミクロの世界—』,（講談社 BB，1997).
8) 外村彰,『目で見る美しい量子力学』（サイエンス社，2010).
9) 別冊数理科学（2006 年 4 月号),『量子の新世紀—量子論のパラダイムとミステリーの交錯—』（サイエンス社，2006).
10) R. ファインマン（著），砂川重信（訳),『ファインマン物理学 5，量子力学』（岩波書店，1979).
11) ロバート．P. クリース（著），青木薫（訳),『世界でもっとも美しい 10 の科学実験』,（日経 BP，2006).
12) 村山斉,『宇宙は何でできているのか—素粒子物理学で解く宇宙の謎—』,（幻冬舎新書，2010).

（はせがわ・しゅうじ，東京大学大学院理学系研究科）

Summer School「数理物理 2011」
可積分系の新展開

日時：2011 年 8 月 25 日（木）14：10
〜28 日（日）12：50

会場：東京大学大学院数理科学研究科大講義室
（駒場キャンパス）

講師と講演題目：

井上玲（千葉大理）
箱玉系の可積分性—クリスタルとトロピカル幾何

白石潤一（東大数理）
Ding-Iohara 代数，Macdonald 関数と AGT 予想

立川裕二（東大 IPMU）
4 次元ゲージ理論と 2 次元共形場理論の不思議な関係

中西知樹（名大多元数理）
共形場理論と団代数

定員： 申込み順で先着 200 名です．（これは会場の都合によるものですが，今まで定員を超えたことはありません．）

参加費： 2,000 円を当日に会場受付で集めます．予稿集（当日配布）などの実費にあてます．また，前年までの予稿集の残部について，当日販売する予定です．

参加申込み： 8 月 10 日までに，氏名，所属，身分，e-mail address または連絡先の住所を明記して，e-mail またはハガキで下記あてに申し込んでください．E-mail は題名を Summer School としていただけると整理の都合上助かります．E-mail の申し込みについては確認のお返事をします．ただし河東の海外出張中は返事が遅れることがあります．その他は，定員を越えた申込みにのみ連絡します．電話での問い合わせにはお答えしかねます．

連絡先：〒 153–8914 目黒区駒場 3–8–1
東京大学大学院数理科学研究科　河東泰之
E-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

なお，最新の情報については，
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/mp2011.htm
をごらんください．

世話人：
緒方芳子 Yoshiko Ogata（東大数理）
小嶋　泉 Izumi Ojima（京大数理研）
河東泰之 Yasuyuki Kawahigashi（東大数理）